

# Zur experimentellen Prüfung des theoretischen Ausdrucks für die Rydberg-Konstante

H. ZYGAN

Farbenfabriken Bayer AG, Leverkusen

(Z. Naturforsch. **25 a**, 1236—1243 [1970] ; eingegangen am 27. Mai 1970)

Berechnungen der fundamentalen Naturkonstanten aus geeigneten Präzisionsmessungen führen zu dem Ergebnis, daß sich die Werte der Elementarladung, der Elektronenmasse, des Planckschen Wirkungsquantums und der Avogadro-Konstante ebenso wie die daraus berechneten Werte der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante  $\alpha$  um etwa 0,2% unterscheiden, wenn diese Werte einmal nur aus solchen Präzisionsmessungen, die von der Theorie des Eielektronen-Atoms keinen Gebrauch machen und ein zweites Mal mit Benutzung des gemessenen Wertes für die Rydberg-Konstante berechnet werden. Zwischen der gemessenen Rydberg-Konstante und dem theoretischen Wert, der sich aus den ohne Benutzung der Atomtheorie erhaltenen Naturkonstanten errechnet, wird ein Unterschied von über 0,4% gefunden.

Zur endgültigen experimentellen Bestätigung oder Auflösung dieser Diskrepanz wird eine neue Methode für die direkte Präzisionsmessung der Elementarladung angeben.

## I. Einleitung

Die heutige Theorie der Ein- und Zweielektronensysteme gibt eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit der Erfahrung bezüglich der *funktionalen* Abhängigkeit der emittierten Wellenlängen von den Haupt-, Neben- und Spinquantenzahlen der zugehörigen Energieniveaus<sup>1, 2</sup>. Aus kürzlich durchgeführten Messungen<sup>3</sup> entnimmt man, daß die nach unserer heutigen Kenntnis berechneten Energieniveaus<sup>4</sup> des H- und D-Atoms mit den gemessenen Werten<sup>3</sup> für niedrigere Haupt- und Nebenquantenzahlen besser als auf 0,3 ppm übereinstimmen. Man würde aber den Sachverhalt verkennen, wenn man aus der Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment bezüglich der *funktionalen* Abhängigkeit eine experimentelle Bestätigung der heutigen Theorie mit demselben Grad von Genauigkeit in jeder Hinsicht herauslesen wollte. Davon könnte offenbar erst dann die Rede sein, wenn man auch die in die Theorie eingehenden fundamentalen Naturkonstanten, insbesondere die Lichtgeschwindigkeit  $c$ , die Elementarladung  $e$ , die Elektronenmasse  $m$ , das Plancksche Wirkungsquantum  $h$  und evtl. noch die Protonenmasse aus solchen Experimenten, in die die zu prüfende Theorie nicht eingeht, mit einer derartigen

Genauigkeit gemessen hätte, daß die in der Theorie auftretenden Ausdrücke — insbesondere der für die Rydberg-Konstante — mit derselben Genauigkeit berechnet werden könnten, wie sie bei der Ausmessung der Spektrallinien erreicht wird. Das ist bisher nicht der Fall gewesen, weil die für die Rechnungen<sup>4</sup> benutzten Konstanten — insbesondere die Rydberg-Konstante für einen unendlich schweren Kern  $R_\infty$  — entweder aus einer früheren Messung oder aus Ausgleichsrechnungen<sup>5</sup> (sogen. besten Sätzen von Naturkonstanten) entnommen worden sind, die die exakte Gültigkeit der heutigen Theorie des H- bzw. D-Atoms voraussetzen.

## II. Berechnung der fundamentalen Naturkonstanten aus Messungen ohne Benutzung der Atomtheorie

Eine Durchsicht der für die Berechnung eines Satzes von Naturkonstanten geeigneten Präzisionsmessungen<sup>5, 6</sup> zeigt, daß heute genügend Messungen vorliegen, zu deren Auswertung die Theorie des H- bzw. D-Atoms nicht benötigt wird, um aus diesen die Werte für  $e$ ,  $m$ ,  $h$  und  $N$  (Avogadro-Konstante) berechnen zu können. Wir gehen dabei so vor, daß wir aus den verfügbaren Messungen, die

Sonderdruckanforderungen an Dr. H. ZYGAN, D-5074 Oden-  
thal, Zum Hahnenberg 48.

<sup>1</sup> H. A. BETHE u. E. E. SALPETER, Hdb. d. Phys., Bd. XXXV: Atome I, Springer-Verlag, Berlin 1957.

<sup>2</sup> F. BOPP u. H. KLEINPOPPEN, Eds. Physics of the One- and Two-Electron Systems, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1969.

<sup>3</sup> L. CSILLAG, Acta Phys. Acad. Sci. Hung. **24**, 1 [1968]; Phys. Letters **20**, 645 [1966].

<sup>4</sup> J. D. GARCIA u. J. E. MACK, J. Opt. Soc. Amer. **55**, 654 [1965].

<sup>5</sup> E. R. COHEN u. J. W. M. DU MOND, Rev. Mod. Phys. **37**, 537 [1965].

<sup>6</sup> B. N. TAYLOR, W. H. PARKER u. D. N. LANGENBERG, Rev. Mod. Phys. **41**, 375 [1969].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

eine bestimmte funktionale Verbindung mehrerer Naturkonstanten messen, jeweils nur diejenige Messung auswählen, die die größte Genauigkeit erreicht. Die Fehlerangaben sind durchweg als Standardabweichungen zu verstehen. Für die Elementarladung wollen wir weiterhin  $e_\infty$  schreiben, um damit anzudeuten, daß dieser Wert ohne Benutzung der Atomtheorie erhalten worden ist.

1. Messung der Lichtgeschwindigkeit  $c$  mit dem Mikrowelleninterferometer<sup>7</sup>

$$c = 2,997\,925(1) \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1} \quad (0,33 \text{ ppm}). \quad (1)$$

2. Bestimmung der Faraday-Konstanten<sup>8</sup>

$$F = e_\infty N = 96\,486,58(70) \text{ Cmol}^{-1} \quad (7,3 \text{ ppm}). \quad (2)$$

Dabei wurde dieser Wert der Neuauswertung<sup>6</sup> des ursprünglichen Ergebnisses<sup>8</sup> entnommen und 1,000 0091(26) als Umrechnungsfaktor vom NBS-Coulomb zum absoluten Coulomb verwendet.

3. Ermittlung der spezifischen Ladung des Elektrons  $e_\infty/m$  ( $m$  Elektronenruhemasse) aus der Messung<sup>9</sup> des Verhältnisses der Zyklotronfrequenz des Elektrons  $\omega_z$  zur Protonenresonanzfrequenz  $\omega_p'$  (Wasserprobe) im gleichen Magnetfeld

$$\omega_p'/\omega_z = 0,001\,520\,993\,4(8) \quad (0,5 \text{ ppm}) \quad (3)$$

und der Messung des gyromagnetischen Verhältnisses  $\gamma_p'$  des Protons (Wasserprobe). Eine im NPL (England) ausgeführte Messung<sup>10</sup> ergab, wenn man sie zuerst<sup>6</sup> auf NBS-Einheiten und dann mit Hilfe des obigen Faktors 1,000 0091(26) auf absolute Einheiten umrechnet

$$\gamma_p' = 26\,751,20(10) \text{ rad s}^{-1} \text{ G}^{-1} \quad (3,7 \text{ ppm}). \quad (4)$$

Aus den im NBS ausgeführten Messungen<sup>11</sup> entnehmen wir den Mittelwert<sup>6</sup> und rechnen ihn ebenso um. Dann folgt

$$\gamma_p' = 26\,751,28(12) \text{ rad s}^{-1} \text{ G}^{-1} \quad (4,5 \text{ ppm}). \quad (5)$$

Für die  $e_\infty/m$ -Berechnung verwenden wir den Mittelwert aus (4) und (5) mit einer aufgerundeten Stan-

dardabweichung

$$\gamma_p' = 26\,751,24(11) \text{ rad s}^{-1} \text{ G}^{-1} \quad (4 \text{ ppm}). \quad (6)$$

und erhalten mit (3)

$$e_\infty/m = 1,758\,8005(70) \cdot 10^7 \text{ emEg}^{-1} \quad (4 \text{ ppm}). \quad (7)$$

4. Messung des Produktes  $N A^3$  ( $A$  Konversionsfaktor von X-Einheiten auf Milli-Ångströms) mit Hilfe der Beugung von Röntgen-Strahlen an Kristallgittern, Dichtemessungen und Atommassenbestimmungen. Wir werten aus der Vielzahl der Messungen zwei repräsentative Arbeiten großer Genauigkeit von HENINS und BEARDEN<sup>12</sup> mit Si-Kristallen sowie von SMAKULA und Mitarbeitern<sup>13</sup> mit Si- und Al-Kristallen neu aus. Da sämtliche vor 1948 ausgeführten Messungen<sup>14–16</sup> der Isotopenanteile von Si eine deutlich niedrigere Atommasse ergeben als die späteren Messungen<sup>17–20</sup>, wollen wir nur die letzteren berücksichtigen. Mit den heutigen Massenwerten<sup>21</sup> für <sup>28</sup>Si, <sup>29</sup>Si und <sup>30</sup>Si ergeben sich unter Benutzung der von den einzelnen Autoren angegebenen Anteile die Werte der Tab. 1 für die Atommasse  $A_{\text{Si}}$  von Si.

		$A_{\text{Si}}$	Mittelwert
1948	WHITE/CAMERON <sup>17</sup>	28,08651	28,08643 (37)
1949	HIBBS <sup>18</sup>	28,08620	
1952	NORTON/ZEMANY <sup>19</sup>	28,08671	
1953	REYNOLDJ <sup>20</sup>	28,08630	

Tab. 1.

Rechnet man aus Tab. II der Arbeit<sup>12</sup> die Meßwerte zurück, so findet man für den mittleren Wert der Gitterkonstante von 17 dort gemessenen Siliciumkristallen Nr. 1 – 6 und 8 – 18

$$a_{\text{Si}, 25^\circ\text{C}} = 5419,805(10) \text{ X-Einh.}$$

und daher mit  $A_{\text{Si}} = 28,086\,43(37)$  und der mittleren Dichte für dieselben Kristalle von 2,329 004(7) g/cm<sup>3</sup> bei 25 °C

$$N A^3 = 6,059\,898(91) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (15 \text{ ppm}). \quad (8)$$

<sup>7</sup> K. D. FROOME, Proc. Roy. Soc. London A **247**, 109 [1958].

<sup>8</sup> D. N. CRAIG, J. I. HOFFMANN, C. A. LAW u. W. J. HAMER, J. Res. Nat. Bur. Stand. **64 A**, 381 [1960].

<sup>9</sup> E. KLEIN, Z. Phys. **208**, 28 [1968].

<sup>10</sup> P. VIGOREUX, Proc. Roy. Soc. London A **270**, 72 [1962].

<sup>11</sup> R. L. DRISCOLL u. P. T. OLSEN, Report to Comité Consultatif d'Électricité, Comité International des Poids et Mesures, 12th Session, October 1968.

<sup>12</sup> I. HENINS u. J. A. BEARDEN, Phys. Rev. **135**, A 890 [1964].

<sup>13</sup> A. SMAKULA u. J. KALNAJS, Nuovo Cim. Suppl. **X-6**, 214 [1957]; Phys. Rev. **99**, 1737 [1955]. — A. SMAKULA, J. KALNAJS u. V. SILS, Phys. Rev. **99**, 1747 [1955]. — A. SMAKULA u. V. SILS, Phys. Rev. **99**, 1744 [1955].

<sup>14</sup> M. G. INGRAM, Phys. Rev. **70**, 653 [1946].

<sup>15</sup> D. WILLIAMS u. P. YUSTER, Phys. Rev. **69**, 556 [1946].

<sup>16</sup> E. P. NEY u. J. H. MCQUEEN, Phys. Rev. **69**, 41 [1946].

<sup>17</sup> J. R. WHITE u. A. E. CAMERON, Phys. Rev. **74**, 991 [1948].

<sup>18</sup> R. F. HIPPS, siehe Bericht von K. T. BAINBRIDGE u. A. O. NIER, Preliminary Report No. 9, Nuclear Science Series, National Research Council, Washington 1950.

<sup>19</sup> J. F. NORTON u. P. D. ZEMANY, J. Chem. Phys. **20**, 525 [1952].

<sup>20</sup> J. H. REYNOLDS, Phys. Rev. **90**, 1047 [1953].

<sup>21</sup> J. H. E. MATTAUCH, W. THIELE u. A. H. WAPSTRA, Nuclear Phys. **67**, 1 [1965].

Die Neuauswertung der Arbeiten<sup>13</sup> für Si und Al liefert mit Benutzung der heute bekannten Atommassen und Röntgen-Wellenlängen<sup>22</sup> folgende an Silicium- und Aluminiumkristallen gemessenen Werte, wobei noch der Wert<sup>12</sup>  $2,329\,004\text{ g/cm}^3$  für die Dichte von Silicium benutzt wurde (s. Tab. 2).

Kristall	$a_{25^\circ\text{C}}$ X.-E.	Dichte (25°C) g/cm <sup>3</sup>	Atom- masse	$N\Lambda^3 \cdot 10^{-23}$ mol <sup>-1</sup>
Si	5419,756	2,329004	28,08643	6,060062
Al	4041,425	2,69801	26,98154	6,060097

Tab. 2.

In guter Übereinstimmung mit (8) findet man daraus für den Mittelwert

$$N\Lambda^3 = 6,060\,080(182) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (30 \text{ ppm}) \quad (9)$$

mit einem geschätzten Fehler<sup>12</sup> von etwa 30 ppm.

5. Bestimmung der Compton-Wellenlänge des Elektrons  $\lambda_c'$  in X-Einheiten durch Messung der Wellenlänge der Vernichtungsstrahlung Elektron-Positron in Tantal<sup>23</sup> mit  $\lambda(\text{WKA}_1) = 208,5811$  X-Einheiten

$$\lambda_c' = h/(mc\Lambda) = 24,214\,21(36) \text{ X-Einh.} \quad (15 \text{ ppm}). \quad (10)$$

6. Anwendung des Wechselstrom-Josephson-Effektes in Supraleitern zur Bestimmung von  $2e_\infty/h$  durch Messung des Quotienten aus Frequenz  $\nu$  und Spannung<sup>24</sup>  $U$

$$2e_\infty/h = \nu/U = 4,835\,933(17) \cdot 10^{14} \text{ Hz/V} \quad (3,6 \text{ ppm}). \quad (11)$$

Mit Benutzung von (8) berechnet man aus diesen Präzisionsmessungen

$$\begin{aligned} \Lambda &= 1,002\,017(16) && (16 \text{ ppm}), \\ N &= 6,023\,372(310) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} && (50 \text{ ppm}), \\ e_\infty &= 4,802\,286(245) \cdot 10^{-10} \text{ esE} && (51 \text{ ppm}), \quad (12) \\ m &= 9,107\,741(455) \cdot 10^{-28} \text{ g} && (50 \text{ ppm}), \\ h &= 6,624\,864(344) \cdot 10^{-27} \text{ erg s} && (52 \text{ ppm}). \end{aligned}$$

Aus diesen Werten erhält man für die Rydberg-Konstante  $R_\infty = 2\pi^2 \cdot m e^4 / (h^3 c)$

$$R_\infty = 109\,693,5(106) \text{ cm}^{-1} \quad (99 \text{ ppm}) \quad (13)$$

und mit Benutzung von (9) an Stelle von (8)

$$R_\infty = 109\,686,9(122) \text{ cm}^{-1} \quad (112 \text{ ppm}) \quad (14)$$

Diese Werte unterscheiden sich vom gemessenen Wert<sup>6</sup>

$$R_\infty = 109\,737,312(5) \text{ cm}^{-1} \quad (0,05 \text{ ppm}) \quad (15)$$

um 43,8 und 50,4  $\text{cm}^{-1}$ , was einem relativen Unterschied von 399 bzw. 459 ppm entspricht.

Nun hängen (13) und (14) stärker von den Meßfehlern für  $c$ ,  $e_\infty/m$ ,  $2e_\infty/h$  und  $\lambda_c'$  als von denen für  $F$  und  $N\Lambda^3$  ab, weil jene Werte allein  $\Lambda$  bestimmen, dessen dritte Potenz dann mit  $N\Lambda^3$  den Wert  $N$  festlegt, was mit  $F$  schließlich zu  $e_\infty$  führt. Da  $e_\infty/m$  und  $2e_\infty/h$  wesentlich genauer als  $\lambda_c'$  gemessen sind und Zweifel an der Zuverlässigkeit der mit Röntgen-Strahlen ausgeführten Präzisionsmessungen geäußert wurden, was zu ihrem teilweisen oder vollständigen Ausschluß aus den letzten beiden Ausgleichsrechnungen<sup>5,6</sup> geführt hat, ist ein Vergleich des oben berechneten Wertes von  $\Lambda$  mit den Ergebnissen direkter Messungen wichtig.

### III. Vergleich des errechneten Konversionsfaktors $\Lambda$ mit direkt gemessenen Werten

Die Literatur enthält eine Vielzahl<sup>12, 25–30</sup> von Zusammenstellungen und Diskussionen der direkten Messungen von  $\Lambda$  mit Hilfe von optischen Plangittern. Entsprechend dem jeweiligen Stand der als verbindlich geltenden oder vom referierenden Autor als richtig angesehenen Werte für die Röntgen-Wellenlängen in X-Einheiten werden die Ergebnisse der ursprünglichen Arbeiten neu ausgewertet. Es empfiehlt sich daher, auf die Originalarbeiten zurückzugreifen, wobei wir alle vor 1931 ausgeführten Messungen wegen offensichtlich großer Fehler weglassen. Nach 1941 sind keine neuen direkten Messungen mehr bekannt geworden, wenn man von der Neuauswertung der Arbeit von TYRÉN<sup>31</sup> durch

<sup>22</sup> J. A. BEARDEN, Rev. Mod. Phys. **39**, 78 [1967].

<sup>23</sup> J. W. KNOWLES, Proceedings of the Second International Conference on Nuclidic Masses 1963, W. JOHNSON, Ed., Springer-Verlag, Wien 1964, p. 113.

<sup>24</sup> W. H. PARKER, D. N. LANGENBERG, A. DENENSTEIN u. B. N. TAYLOR, Phys. Rev. **177**, 639 [1969].

<sup>25</sup> J. A. BEARDEN, J. Appl. Phys. **12**, 395 [1941].

<sup>26</sup> R. T. BIRGE, Amer. J. Phys. **13**, 63 [1945].

<sup>27</sup> J. W. M. DUMOND, Proc. National Academy of Sciences **45**, 1052 [1959].

<sup>28</sup> J. A. BEARDEN, Phys. Rev. **137**, B 181 [1965].

<sup>29</sup> J. W. M. DUMOND, Z. Naturforsch. **21a**, 70 [1966].

<sup>30</sup> J. S. THOMSEN u. A. F. BURR, Amer. J. Phys. **36**, 803 [1968].

<sup>31</sup> F. TYRÉN, Z. Phys. **109**, 722 [1938] und Dissertation, Uppsala 1940.

Lfd. Nr.	Jahr	Autor	Linie	Wellenlänge <sup>22</sup>	Wellenlänge	$\lambda$	Bemerkungen
				X.-E.	mÅ		
1	1931	BEARDEN <sup>34</sup>	Cu K $_{\beta 1,3}$	1389,361	1392,25 (14)	1,002079 (101)	
2	1931		Cu K $_{\alpha 1,2}$	1538,674	1541,72 (15)	1,001980 (97)	
3	1931		Cr K $_{\beta 1,3}$	2080,592	2084,78 (21)	1,002013 (101)	
4	1931		Cr K $_{\alpha 1,2}$	2286,301	2290,97 (23)	1,002042 (100)	
5	1935	BEARDEN <sup>35</sup>	Cu K $_{\alpha 1}$	1537,400	1540,60 (30)	1,002081 (195)	Meßmethode kann systematische Fehler von der Größenordnung 50 ppm ergeben <sup>36</sup>
6	1935	BÄCKLIN <sup>37</sup>	Al K $_{\alpha 1,2}$	8323,02	8339,5 (17)	1,001980 (204)	Fehler als Summe aller max. Fehler berechnet
7	1935	SÖDERMANN <sup>38</sup>	Al K $_{\alpha 1,2}$	8323,02	8340 (1)	1,002040 (119)	Messung geringerer Genauigkeit, von der nur eine kurze Notiz vorliegt
8	1938 1940	TYRÉN <sup>31</sup>	Al K $_{\alpha 1,2}$	8323,02	8339,7 (3)	1,002004 (36)	Eichlinien berechnet nach Dirac ohne Lambshift, Messung nur mit Al K $_{\alpha 1,2}$
9	1966	TYRÉN/EDLÉN u. SVENSSON <sup>32</sup>	Al K $_{\alpha 1,2}$	8323,02	8339,92 (30)	1,002030 (36)	Neuauswertung von Tyréns Messung mit Al K $_{\alpha 1,2}$ mit Lambshift

Tab. 3. Zusammenstellung der direkten Messungen des Konversionsfaktors  $\lambda$ . Mittelwert von  $\lambda$  ohne Berücksichtigung von Pos. 1, 5 und 8: 1,002 014 (30).

EDLÉN und SVENSSON<sup>32</sup> und einer vorläufigen Mitteilung<sup>33</sup>, auf die wir noch unten zurückkommen werden, absieht. Tabelle 3 gibt eine Zusammenstellung wieder, die mit Benutzung der neuen, von BEARDEN<sup>22</sup> veröffentlichten Wellenlängenwerte erhalten wurde. Dabei wurden die in Beardens Tafeln in Å\* angegebenen Werte durch Rückrechnung mit dem Konversionsfaktor 1,002 056 in X-Einheiten zurückverwandelt. Im Falle unaufgelöster Linien (AlK $_{\alpha 1,2}$ ) wurde der sich aus den relativen Intensitäten ergebende Mittelwert in üblicher Weise berechnet. Man bemerkt, daß die beiden untersten Werte von  $\lambda$  Pos. 2 und 6 von zwei verschiedenen Autoren, die beiden obersten Pos. 1 und 5 aber nur von ein und demselben Autor erhalten wurden. Der eine der beiden obersten Werte Pos. 5 ist relativ ungenauer, und nach einer späteren Mitteilung des Autors<sup>36</sup> kann die dabei benutzte Meßmethode (Doppelkristallspektrometer mit dazwischengestelltem Gitter) systematische Fehler von der Größenordnung 50 ppm enthalten. Es bleibt allein der hohe Wert von Pos. 1. Er ist offenbar nicht unverträglich mit den anderen Werten, obwohl die in der Tabelle angegebenen ursprünglichen Fehler<sup>34</sup> der Pos. 1 bis 4

vom Autor in einer späteren Neuauswertung<sup>25</sup> auf die Hälfte reduziert wurden. Daß dieser Wert aber als einziger weit aus dem Streubereich der übrigen herausragt, zeigt deutlicher als seine Fehlerangabe, daß möglicherweise in diesem Fall viele Fehlereinflüsse zufällig dieselbe Richtung hatten. Obwohl Tyréns Ergebnis eine wesentlich geringere Fehlerangabe als die anderen Messungen hat, wird diese Messung, da sie nicht in demselben Sinne eine direkte Messung wie die übrigen ist, nicht stärker als jede andere bewertet. Mit Ausschluß von Pos. 1, 5 und 8 erhält man damit den Mittelwert  $\lambda = 1,002\,014$ . Setzt man eine obere Fehlergrenze von 30 Einheiten der letzten Stelle an, so liegen im wesentlichen alle Werte, aus denen dieser Mittelwert gebildet wurde, im Fehlerbereich. Das Endergebnis der heute vorliegenden direkten Messungen von  $\lambda$  ist damit

$$\lambda = 1,002\,014(30). \quad (16)$$

Dieser Wert liegt sehr nahe sowohl dem von SIEGBAHN<sup>39</sup> im Jahre 1943 empfohlenen Wert  $\lambda = 1,002\,01$  als auch dem von der X-Ray Group of the Institute of Physics nach Konsultation mit Siegbahn und der American Society for X-Ray and

<sup>32</sup> B. EDLÉN u. L. A. SVENSSON, Ark. Fys. **28**, 427 [1965].

<sup>33</sup> H. A. KIRKPATRICK, J. W. M. DuMOND u. E. R. COHEN, Proceedings of the 3d International Conference on Atomic Masses, Ed. R. C. BARBER, University of Manitoba Press, Winnipeg 1968.

<sup>34</sup> J. A. BEARDEN, Phys. Rev. **37**, 1210 [1931].

<sup>35</sup> J. A. BEARDEN, Phys. Rev. **48**, 385 [1935].

<sup>36</sup> J. A. BEARDEN u. J. S. THOMSEN, Bull. Amer. Phys. Soc. **8**, 313 [1963].

<sup>37</sup> E. BÄCKLIN, Z. Phys. **93**, 450 [1935].

<sup>38</sup> M. SÖDERMANN, Nature London **135**, 67 [1935].

<sup>39</sup> M. SIEGBAHN, Nature London **151**, 502 [1943].



Electronic Diffraction angenommenen und durch BRAGG<sup>40</sup> 1947 veröffentlichten Wert

$$A = 1,002\,02(3).$$

Er wird zudem auch heute noch als der allgemein angenommene Wert angesehen. Eine Erhöhung von  $A$  auf  $1,002\,056^{28}$  oder sogar auf  $1,002\,076^6$ , wobei die Abweichung höchstens 5,3 ppm betragen soll, ist auch nach der Korrektur von Tyréns Messung durch Berücksichtigung der Lambshift mit den direkten Messungen von  $A$  nicht im Einklang.

Zwei neuere Versuche zur Wiederholung einer absoluten Wellenlängenmessung einer wohldefinierten Röntgen-Linie sind auf Schwierigkeiten gestoßen<sup>28, 33</sup>, was in Anbetracht der früheren Messungen und in Anbetracht der Wichtigkeit eines genauen direkten Wertes von  $A$  sehr unbefriedigend wirkt. Allerdings zeigen die letzten Ergebnisse in der Arbeit von KIRKPATRICK, DUMOND und COHEN<sup>33</sup>, daß die übermäßigen Streuungen der Meßwerte möglicherweise auf nunmehr erkannten Justierfehlern beruhten, und daß daher der mit  $\lambda(\text{Be}_a^{\text{IV}}) = 75,927\,76\text{ \AA}$  und  $\lambda(\text{AlK}_{1,2}) = 8323,02\text{ X-Einheiten}$  dort durch Auswertung der letzten Platte Nr. 9 erhaltene Wert  $A = 1,001\,989$  zuverlässiger sein dürfte als es in dieser Arbeit zum Ausdruck kommt. Auch hier deutet das experimentelle Ergebnis auf eine Bestätigung des obigen niedrigen Wertes für  $A$  hin.

Jedes Ausweichen zu indirekten Methoden der Bestimmung von  $A$  insbesondere durch Benutzung des zu einem abgestimmten Satz von Naturkonstanten gehörenden Wertes der Avogadro-Zahl setzt die Gültigkeit aller in die Ausgleichung eingehenden theoretischen Beziehungen, insbesondere derjenigen der Atomtheorie, voraus. Offensichtlich kommt jede Ausgleichung, die eine höhere Genauigkeitsstufe anstrebt, nicht ohne die Hypothese aus, daß die – möglicherweise im Rahmen geringerer Genauigkeiten noch erfüllten – theoretischen Beziehungen auch für die erhöhten Genauigkeitsforderungen gelten. Die Unstimmigkeiten zwischen dem oben resultierenden Wert  $A = 1,002\,017(16)$  und dem aus der letzten Ausgleichung<sup>6</sup> ohne Beweis dieser Hypothese erhaltenen Wert  $A = 1,002\,076(5)$  scheinen darauf hinzuweisen, daß diese Hypothese mit dem wahren Sachverhalt nicht mehr vereinbar ist.

#### IV. Die Rolle von $A$ bei der Verdrängung der Unstimmigkeiten

Aus dem gemessenen Wert (15) für  $R_\infty$  in Verbindung mit (1), (2), (7), (10) und (11) folgt

$$N A^3 = 6,058\,687(288) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (48 \text{ ppm}). \quad (17)$$

Der Unterschied zu (8) und (9) beträgt  $-200$  bzw.  $-230$  ppm. Erst wenn man (10) um  $67$  bzw.  $77$  ppm erniedrigen würde, was  $A = 1,002\,084$  und  $A = 1,002\,094$  zur Folge hätte, ergäben sich (8) und (9).

Man wird sich über die Tragweite einer Abänderung von  $A$  leichter klar, wenn man bedenkt, daß die dritte Potenz von  $A$  die Elementarladung bestimmt und daher ein um etwa  $67$  bis  $77$  ppm (gegenüber  $A = 1,002\,017$ ) erhöhter Wert die Elementarladung um  $201$  bis  $231$  ppm erhöht. Da  $e/m$  ebenso wie  $h/e$  bei der Ausgleichsrechnung wegen ihrer hohen Meßgenauigkeit kaum nachgeben, werden fast ebenso  $m$  und  $h$  erhöht. Da  $R_\infty$  dann nahezu durch die sechste(!) Potenz von  $A$  bestimmt wird, kann ein Fehler in der theoretischen Deutung von  $R_\infty$  – vorausgesetzt, er hat die richtige funktionale Abhängigkeit – bis zu  $462$  ppm kompensiert werden!

Damit sieht es ganz so aus, als ob der aus solchen Naturkonstanten, die ohne Benutzung der Theorie des H- bzw. D-Atoms bestimmt werden können, gemäß der heutigen Theorie errechnete Wert der Rydberg-Konstanten mit ihrem gemessenen Wert unvereinbar ist. Sollten die aufgezeigten Diskrepanzen die Notwendigkeit einer Überprüfung der heutigen Theorie des H- bzw. D-Atoms in dem hier angedeuteten Sinn erforderlich machen, so hätte das auch eine wesentliche Änderung des Wertes der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten zur Folge. Man erhält aus dem oben ohne Benutzung der Atomtheorie errechneten Wertesatz

$$\alpha_\infty^{-1} = 137,0635(69) \quad (50 \text{ ppm}) \quad (18)$$

und analog mit Benutzung von (9) an Stelle von (8)

$$\alpha_\infty^{-1} = 137,0676(77) \quad (56 \text{ ppm}), \quad (19)$$

während aus (1), (2), (7), (10), (11) und (15) mit der Hypothese  $R_\infty = 2\pi^2 m e^4 / (h^3 c)$  folgt

$$\alpha^{-1} = 137,0361(4) \quad (2,7 \text{ ppm}), \quad (20)$$

was einen mittleren Unterschied von  $220$  ppm gegenüber den ohne Atomtheorie errechneten Werten ergibt.

<sup>40</sup> W. L. BRAGG, Rev. Sci. Instr. **24**, 27 [1947].

Interessanterweise wurde kürzlich bei einem Versuch<sup>41, 42</sup>, die elektrische Wechselwirkung zu begründen, für die Feinstrukturkonstante der Ausdrück

$$\alpha_{\infty} = \frac{e_{\infty}^2}{\hbar c} = \frac{1}{48\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-7g^2}}{1 - \Phi^2(\sqrt{3}g)} dg$$

$$= (137,066\,1422\dots)^{-1} \quad (21)$$

gefunden, was überraschend gut mit den beiden ohne Benutzung der Atomtheorie resultierenden Werten (18) und (19) übereinstimmt.

### V. Vorschlag für eine Präzisionsmessung der Elementarladung ohne Benutzung der Atomtheorie

Der heutige Ausdruck für  $R_{\infty}$  könnte unmittelbar bestätigt oder widerlegt werden, wenn man den Wert  $e_{\infty}$  ohne Benutzung der Atomtheorie mit hoher Präzision messen könnte. In Verbindung mit  $c$ ,  $e_{\infty}/m$  und  $2e_{\infty}/h$ , die sämtlich mit hoher Präzision gemessen werden können, wären alle in  $R_{\infty}$  eingehenden Größen mit vergleichbarer Präzision bestimmt.

Eine direkte Messung von  $e_{\infty}$  ist nur an mikroskopisch kleinen Probekörpern im Schwebekondensator<sup>43-45</sup> möglich. Nun ist genügend deutlich geworden<sup>26, 46, 47</sup>, daß eine solche, in bisher bekannter Weise durchgeführte Messung im günstigsten Fall eine Genauigkeit von etwa 1% erreichen kann. Es gehen in eine derartige Messung nicht nur die elektrische Kraft und das Gewicht der Probekugel ein, sondern auch noch die Reibungskräfte bei einer Bewegung der Probekugel im umgebenden Gas. Die obige Grenze der Meßgenauigkeit ist allein durch die Unsicherheit bei den Reibungskräften bedingt (unkontrollierbare Strömungen des Gases, unsicherer Koeffizient der inneren Reibung, Temperaturunterschiede u. a.). Eine wesentliche Überschreitung dieser Grenze kann nur nach Ausschaltung dieser Einflüsse, d. h. nach dem Übergang zur Messung im Vakuum möglich sein. Nun kann aber andererseits bei der bisherigen Meßmethode auf die Reibungskräfte und damit die Anwesenheit eines Gases

nicht verzichtet werden, weil auf diese Weise der Radius der Probekugel bestimmt wird. Dagegen ist die Aufgabe, einen mikroskopisch kleinen Probekörper zwischen zwei Kondensatorplatten im Vakuum in den Schwebezustand zu bringen und in diesem zu erhalten, beim heutigen Stand der Experimentiertechnik nicht mehr unlösbar.

Es wurde daher bereits früher vorgeschlagen<sup>48</sup>, den Radius  $r$  der Probekugel im Hochvakuum über ihr elektrisches Potential im Schwebekondensator mit Hilfe eines monoenergetischen Elektronenstrahls bekannter Beschleunigungsspannung zu messen, wobei zu diesem Zweck die Spannung am Schwebekondensator jeweils für eine kurze Zeit ( $10^{-2}$  s) periodisch abgeschaltet wird, wodurch die Probekugel nicht wesentlich ihre Lage ändert, aber die Energie des Elektronenstrahls (Größenordnung 10 eV) nicht gestört wird.

Aber auch bei dieser Meßmethode geht in die Masse der Probekugel und damit auch in den Wert der Elementarladung der von der Radiusmessung stammende Fehler mit seinem dreifachen Wert ein. Dazu kommen noch die Schwierigkeiten der Messung des Potentials von Metalloberflächen gegenüber dem Vakuum.

Da  $c$ ,  $e_{\infty}/m$  und  $2e_{\infty}/h$  mit einer Genauigkeit der Größenordnung  $10^{-6}$  gemessen werden können, wird eine Methode für die direkte Messung der Elementarladung von wachsendem Interesse, wenn sie eine vergleichbare Genauigkeit zu erreichen verspricht. Dem folgenden Vorschlag soll daher eine angestrebte Genauigkeit der Gesamtmessung von einigen  $10^{-6}$  und von  $1 \cdot 10^{-6}$  aller in den Endwert eingehenden Einzelmessungen zugrunde gelegt werden.

Offenbar könnte die größte Genauigkeit der Elementarladungsmessung im Schwebekondensator erreicht werden, wenn man die Masse der Probekugel direkt auf einer Waage hoher Genauigkeit bestimmen könnte. Da bei den heute verfügbaren Waagen für eine Wägung mit der relativen Genauigkeit von  $10^{-6}$  die Masse etwa 0,1 g betragen muß, und da die Masse einer Probekugel maximal mit etwa  $10^{-7}$  g angenommen werden darf, um in praktisch erreichbaren Kondensatorfeldern höchstens soviel Elementarladungen zum Schweben zu benötigen, daß ihre

<sup>41</sup> H. ZYGAN, Phys. Verh. VDPG 3, 69 [1963].

<sup>42</sup> H. ZYGAN, Dissertation D 17, Darmstadt 1969.

<sup>43</sup> R. A. MILLIKAN, Phil. Mag. 34, 1 [1917]; Phys. Rev. 2, 109 [1913].

<sup>44</sup> E. BÄCKLIN u. F. FLEMBERG, Nature London 135, 655 [1936].

<sup>45</sup> V. D. HOPPER u. T. H. LABY, Proc. Roy. Soc. London A 178, 243 [1941].

<sup>46</sup> R. A. MILLIKAN, Ann. Phys. 32, 34 [1938].

<sup>47</sup> V. D. HOPPER, Australian J. Sci. Res. A 1, 369 [1948].

<sup>48</sup> H. ZYGAN, Phys. Verh. VDPG 3, 208 [1963].

Anzahl noch eindeutig festgestellt werden kann (etwa  $10^4$ ), ist dieses Ziel mit nur einer einzigen Probekugel nicht erreichbar. Führt man jedoch in einem automatisierten Meßverfahren mit einem angeschlossenen Rechner eine Vielzahl ( $10^5 - 10^6$ ) derartiger Messungen durch, sammelt die einzelnen Probekugeln in einem gemeinsamen Behälter und speichert die zu den einzelnen Messungen  $i$  gehörenden Werte der eindeutig bestimmten ganzen Zahlen  $Z_i$  und die für den Schwebezustand notwendigen Kondensatorfeldstärken  $E_i$ , so gilt mit  $g$  als Erdbeschleunigung wegen  $e_\infty Z_i E_i = m_i g$  auch  $e_\infty \sum Z_i E_i = g \sum m_i$  und daher mit  $M = \sum m_i$

$$e_\infty = g \frac{M}{\sum Z_i E_i} \quad (25)$$

$M$  wird am Ende der Meßreihe direkt durch Wägung mit hoher Genauigkeit gemessen und  $\sum Z_i E_i$  aus den gespeicherten Daten mit einer Genauigkeit berechnet, die einen minimalen zufälligen Fehleranteil enthält. Damit ist das Prinzip der vorgeschlagenen Messung erklärt.

Zur Realisierung eines derartigen Experiments erscheint es zweckmäßig, sich zuerst etwa  $10^6$  Probekugeln von möglichst gleichem Durchmesser bzw. gleicher Masse herzustellen. Wie weit man dabei bei Durchmessern von  $20 - 50 \mu$  (siehe unten) kommen kann, ist nicht bekannt. Man kann aber annehmen, daß durch wiederholtes Aussieben mit Hilfe von Feinstsieben, im Luftstrom oder auf elektrischem Wege<sup>48</sup> eine Gleichmäßigkeit der Kugeln von höchstens 1% Gewichtsschwankung erreicht werden kann. Um die Wirkungen der Haftkräfte zwischen den Probekugeln ebenso wie zwischen diesen und anderen Oberflächen zu umgehen, kann man auch daran denken, die Probekugeln erst im Meßkondensator selbst oder in einem Hilfskondensator *einzel*n herzustellen (z. B. durch Abschmelzen konstanter Stücke eines dünnen kalibrierten Drahtes durch Elektronen- oder Laserstrahlung). Die Entwicklung einer Vorrichtung zur Beschickung des Meßkondensators mit einzelnen, durch einen Elektronenstrahl auf etwa gleiches Potential während des freien Falles aufzuladenden Probekugeln und zur Sammlung der Probekugeln nach beendeter Messung, ist eine Voraussetzung für den automatisierten Meßablauf. Ein geeignetes optisch-elektronisches System zur Messung der Lage und momentanen Geschwindigkeit der beleuchteten Probekugeln ist notwendig. Man könnte dabei an eine Anordnung mit einem langbrennweitigen Objektiv großer Lichtstärke in Verbindung mit einer

elektronischen Bildwandlereinrichtung und einem Rechner denken. Dabei hätte letzterer die Aufgabe, aus der momentanen Lage und Geschwindigkeit des Bildes der Probekugel die notwendigen Steuersignale für die Regelung der Spannung am Schwebekondensator zu ermitteln, um die zuerst frei in den Kondensator hineinfallende Probekugel einzufangen und sie dann im Schwebezustand zu halten.

Da nur solche Probekugeln verwendet werden sollen, deren Masse auf etwa 1% (oder besser) gleich ist, und da alle Probekugeln durch denselben, möglichst monoenergetischen Elektronenstrahl aufgeladen werden, bis die zentral anlaufenden Elektronen gerade vor der Berührung der Oberfläche der Probekugeln abgebremst werden, tragen alle eine beispielsweise auf 1% übereinstimmende Anzahl von Elementarladungen. Um diese Anzahl  ${}^0Z_i \sim 10^4$  zu bestimmen, ändert man durch kurze Bestrahlung der schwebenden Probekugeln mit Elektronen, Ionen oder durch photoelektrischen Effekt die Gesamtladung um etwa 10 Elementarladungen auf den Wert  ${}^1Z_i$ . Kennt man den Wert der Elementarladung  ${}^0e_\infty$  bereits mit einer Genauigkeit von 1%, so kann man die Anzahl  ${}^0Z_i - {}^1Z_i$  mit *Sicherheit* aus den Gleichgewichtsfeldstärken  ${}^0E_i$  und  ${}^1E_i$  bzw. für  ${}^0Z_i$  und  ${}^1Z_i$  Elementarladungen (bei ein und derselben Probekugel) ermitteln. Bezeichnet man mit  ${}^0m$  den auf 1% genau durch direkte Wägung mit einer Mikrowaage von etwa 100 Probekugeln erhaltenen Massenmittelwert, so ist

$${}^1\tilde{k}_i = {}^0m / {}^0e_\infty g \left\{ \frac{1}{{}^0E_i} - \frac{1}{{}^1E_i} \right\} \quad (26)$$

eine Zahl, die nur in den Bereichen  $\langle {}^1k_i - 0, 2, {}^1k_i + 0, 2 \rangle$  liegen kann, worin  ${}^1k_i$  eine ganze Zahl ist. Die Auswahl des betreffenden Wertes für die ganze Zahl  ${}^1k_i = {}^0Z_i - {}^1Z_i$  ist daher eindeutig. Durch Einsetzen des ganzzahligen Wertes von  ${}^1k_i$  in (26) kann an Stelle von  $g {}^0m / {}^0e_\infty$  ein korrigierter Wert  ${}^1w_i$  berechnet werden. Dann führt aber eine zweite Änderung der Anzahl der Elementarladungen auf der Probekugel um etwa  ${}^2k_i = {}^0Z_i - {}^2Z_i \sim 10^2$  zu einer Gleichgewichtsfeldstärke  ${}^2E_i$ , und es folgt

$${}^2\tilde{k}_i = {}^1w_i \left\{ \frac{1}{{}^0E_i} - \frac{1}{{}^2E_i} \right\}, \quad (27)$$

woraus die ganze Zahl  ${}^2k_i$  eindeutig bestimmt werden kann. Durch Einsetzen dieser Zahl in (27) wird ein weiterer Näherungswert  ${}^2w_i$  ermittelt. So fort-fahrend ändert man im letzten Schritt  $\nu$  die Anzahl der Elementarladungen um etwa  ${}^\nu k_i \sim 0, 1$   ${}^0Z_i \sim 10^\nu$ ,

bestimmt diese Zahl aus dem Wert  $\nu \tilde{k}_i$ , berechnet das zugehörige  $\nu w_i$  und findet

$${}^0\tilde{Z}_i = \nu w_i / {}^0E_i, \quad (28)$$

wodurch die Auswahl von  ${}^0Z_i$  eindeutig festgelegt wird.

Eine allgemeinere Formulierung der Bestimmung ganzer Zahlen durch Messungen mit Hilfe von begrifflich kontinuierlichen Skalen endlicher Genauigkeit wurde bereits früher ausgearbeitet<sup>49</sup>. Insbesondere wurde genauer untersucht, wie groß die prinzipiell noch bestimmbaren ganzen Zahlen bei gegebener Ungenauigkeit sein dürfen. Aus experimentellen Gründen wurden die obigen numerischen Werte so gewählt, daß man bei der vorausgesetzten (maximalen) Ungenauigkeit der Spannungsmessung von  $10^{-6}$  und  ${}^0Z_i \leq 1,1 \cdot 10^4$  sicher unter diesem Grenzfall bleibt. Das dürfte um so mehr der Fall sein, weil für die Bestimmung von  ${}^0Z_i$  nicht absolute (geechte) Werte der Gleichgewichtsspannung am Schwebekondensator, sondern nur Werte in derselben sonst aber beliebigen Einheit benötigt werden.

Wählt man Platin als Material für die Probekugeln wegen seiner günstigen chemischen und mechanischen Eigenschaften sowie seiner hohen Austrittsarbeit, so ergibt sich für die Probekugeln bei einem Radius von  $11,6 \mu$  und einer Dichte von  $21,4 \text{ g/cm}^3$  eine Masse von etwa  $0,14 \cdot 10^{-6} \text{ g}$ . Beträgt die Genauigkeit der Spannungsmessung  $10^{-6}$ , so kann die Probekugel etwa  $10^4$  Elementarladungen tragen. Die benötigte Kondensatorfeldstärke im Schwebezustand beträgt dann  $8,58 \text{ kV/cm}$ . Das Beschleunigungspotential der Elektronen zur Aufladung der Probekugel ist  $1,24 \text{ V}$ . Dabei tritt auf der Oberfläche der Probekugel eine Feldstärke von  $1,1 \text{ kV/cm}$  auf, was weit unterhalb der Grenzfeldstärke für die Feldemission von Platin liegt. Mit Ausnahme der nicht registrierten Einfangphase der

Probekugel braucht die Spannung am Schwebekondensator in den eigentlichen Meßphasen nur um 10% zu variieren. Man braucht deshalb neben der konstant angelegten Spannung von 90% der Gleichgewichtsspannung nur die restlichen 10% mit einem Digitalvoltmeter auf  $10^{-5}$  genau zu messen. Die auf  $10^{-6}$  genaue Abstandsmessung der Kondensatorplatten ist ohne wesentliche Schwierigkeiten möglich und Kontaktspannungen zwischen den beiden mit gleicher Oberfläche ausgestatteten Kondensatorplatten heben sich bei Einhaltung der notwendigen Vorsichtsmaßnahmen weitgehend auf. Irgendwelche verbleibenden Unterschiede der Kontaktspannungen von der Größenordnung  $0,02 \text{ V}$  spielen bei einer Kondensatorspannung von etwa  $20 - 50 \text{ kV}$  keine Rolle mehr.

Beträgt die Mindestmasse, die mit einer Genauigkeit von  $10^{-6}$  gewogen werden kann,  $0,1 \text{ g}$ , so sind etwa  $7 \cdot 10^5$  Messungen mit je einer Probekugel erforderlich. Schätzt man noch die Zeit für die Beschickung des Meßkondensators mit der Probekugel, für die bei  $10^4$  Elementarladungen auf jeder Probekugel notwendigen vier Messungen der Kondensatorgleichgewichtsspannung und die Ablage der Probekugel im gemeinsamen Sammelbehälter auf  $30 \text{ s}$ , so würde die Gesamtmessung etwa 8 Monate dauern.

Zweifelloos wird der experimentelle Aufwand für eine derartige Messung erheblich sein. Nun würde aber bereits eine solche Messung mit einer Genauigkeit von  $10^{-5}$ , die nur etwa einen Monat dauern würde, ganz unabhängig davon, ob das Meßergebnis die hier behaupteten Unstimmigkeiten betreffend  $R_\infty$  und  $\alpha$  bestätigen oder widerlegen würde, in jedem Falle für die Berechnung der fundamentalen Naturkonstanten von großem Nutzen sein.

Herrn Prof. Dr. OTTO SCHERZER danke ich herzlich für eine wertvolle Diskussion. Herrn Direktor Dr. KARL SIGWART, Farbenfabriken Bayer AG, bin ich für die Förderung dieser Arbeit zu großem Dank verpflichtet.

<sup>49</sup> H. ZYGAN, unveröffentlicht.